

波的传播及其与介质间断相互作用的数值模拟研究

洪 炯 荃

提 要

本文用有限差分法模拟研究二维空间中波的传播、散射及其与介质间断的相互作用。

文章第一部分运用所模拟的纵波波源讨论了半无限空间表面台阶地形或槽形裂隙所造成的波的散射。这些间断可模拟具有波长量级的悬崖或峡谷。第二部分用差分法与扰动法结合而成的混合法处理半无限空间表面有另一种物质构成的表面浅障碍时波的传播,以模拟山脊、堑沟等地形的影响。此混合法也被用于讨论半无限空间内含水平夹层或孔隙的问题。所得研究结果对波的传播及其与介质间断的相互作用的理论研究和地震波破坏效应的分析和隔离等应用研究有一定的意义。

前 言

波的传播及其与介质的相互作用是涉及多门学科的重要基本课题。鉴于大多数实际问题难于寻求理论解,人们或求助于实验研究,或进行数值模拟研究。有限差分法即为一常用的数值模拟方法。与其它某些数值模拟方法相比,该方法具有易于编写程序和要求较少的计算时间等优点,且它特别适用于介质中裂隙或其它间断的特征长度可与波长相比拟的情况,从而提供了一种既能研究远区又能研究近区中波的反射、散射现象并揭示出结构对波的动态响应的有效方法。

本文在线弹性前提下讨论纵波波源所产生的波的传播与相互作用,所讨论的问题可模拟地震波范围里悬崖、峡谷或山脊、堑沟的地形效应。文中主要结果以位移场或震波图的形式给出,所有图形均在伦敦大学由 Amdahl 计算机计算并绘制。

一、基本方程及其差分形式

在均质、各向同性的弹性介质中,波的传播所遵循的方程是

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \text{grad div} \mathbf{U} - \mu \text{rot rot} \mathbf{U} \quad (1)$$

其中 ρ 为介质密度; U 为位移矢量; λ, μ 为拉梅常数; t 为时间。再加上适当的边界条件和初始条件即可求解。(1)式适用于无源时波的传播问题; 而对由某种以体力表示的波源所激发的波的传播问题或波源问题, 则方程应取(2)式:

$$\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \text{grad div} U - \mu \text{rot rot} U + \rho F \quad (2)$$

其中 F 为单位质量介质所受的体力矢量。若波源为边界上所受之应力, 则应在边界条件中予以相应考虑。

以上公式及有关边界条件、初始条件中的偏微分若用对时空变量的二次差分公式表示, 则可得相应的差分形式。现仅以 x - z 二维空间中由(2)式导出的介质内部网格点上垂直位移的差分公式为例作一说明。

$$\begin{aligned} W_{m,n,k+1} = & 2W_{m,n,k} - W_{m,n,k-1} + \beta^2 \tau^2 (W_{m+1,n,k} - 2W_{m,n,k} + W_{m-1,n,k}) \\ & + (\alpha^2 - \beta^2) \tau^2 (U_{m+1,n+1,k} - U_{m+1,n-1,k} - U_{m-1,n+1,k} + U_{m-1,n-1,k}) \\ & + \alpha^2 \tau^2 (W_{m,n+1,k} - 2W_{m,n,k} + W_{m,n-1,k}) + s^2 F_z \\ & m=0, M; n=0, N; k=0, K \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $W_{i,j,l}$ 表示在 $x=ib$; $z=jb$ 网格点的质点在 $t=ls$ 时的垂直位移; $U_{i,j,l}$ 为相应点的水平位移; b, s 分别为有限差分法的空间步长和时间步长; $\tau=s/b$; α, β 为介质之纵波和横波波速; F_z 为体力之垂直分量; M, N, K 则为差分网格沿 x, z 和 t 轴之最大网格点序号。由水平位移和相应边界条件也可求得相应差分形式。(3)式中由两个连续时间步 $(k-1)s$ 和 ks 时的位移可求得下一时间步 $(k+1)s$ 的位移, 进而求得整个位移场随时间的变化, 这就是有限差分法的基本要点。在本文的研究中, 差分法采用均匀网格即 x 轴和 z 轴均以 b 为空间步长; 时间步长 $s=0.5b/\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ 以保证满足 Von Neumann 稳定性条件; 差分网格人工边界分别采用对称边界条件和吸收边界条件, 以减小计算量并避免人工边界对解的干扰。

二、纵波波源的模拟

本文所模拟波源的二个体力分量在 x - z 二维坐标系中由下式表示

$$\begin{cases} F_x = h'(x-x_0, \Delta x) h(z-z_0, \Delta z) g(t) \\ F_z = h(x-x_0, \Delta x) h'(z-z_0, \Delta z) g(t) \end{cases} \quad (4)$$

其中 (x_0, z_0) 为波源中心之座标; 函数 $h(x, \Delta x)$ 及其微商 $h'(x, \Delta x)$ 和时间函数 $g(t)$ 由(5)~(7)式决定。

$$\begin{cases} h(x, \Delta x) = 1 - \delta_{2x}[x^2 H(x)/2] & x \geq 0 \\ h(-x, \Delta x) = h(x, \Delta x) \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} h'(x, \Delta x) = -\delta_{2x}[x H(x)] & x \geq 0 \\ h'(-x, \Delta x) = -h'(x, \Delta x) \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} g(t) = -h(t-2\Delta t, \Delta t) & t \geq 2\Delta t \\ g(t) = h(2\Delta t-t, \Delta t) & 0 \leq t \leq 2\Delta t \end{cases} \quad (7)$$

式中 $\delta_{2x}[P(x)] = [P(x) - 2P(x-\Delta x) + P(x-2\Delta x)]/\Delta x^2$ 为二阶差分因子。

(4) 式所示的为一纵波波源, 在地震波研究中可用于模拟爆炸波源^[1]。它系由平滑后的 δ 函数合理组合而成, 故可避免物理、数学上的间断以及解的不稳定性和发散。改变式中 Δt , Δx , 即可改变该波源的延续时间和空间范围, 本文一般取 $\Delta x = \Delta z = b$, $\Delta t = 0.25b/a$, 此时 (4) 式在二维空间中可模拟点源。

图 1 是该波源作用下半无限二维空间位移场随时间的变化, 它给出了在介质自由表面反射前后波的传播的直观图象。就第 165 步时的图形而言, 外围两圈为原始纵波, 中间为反射所产生的纵波和横波。频谱分析的结果表明该纵波波源的主频所对应的波长为 $25b$ 。

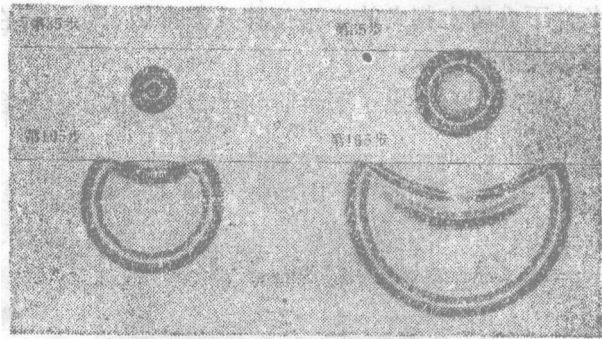


图 1 纵波波源所产生的波在不同时刻的位移场

三、波与台阶形或槽形裂隙的相互作用

岩体中传播的波和大小可与波长相比拟的悬崖、狭谷等地形间断的相互作用问题可用台阶形或槽形裂隙模拟。因相互作用主要发生在拐角, 故首先考察拐角附近的散射现象。图 2 为距下台阶边缘不远处一浅埋波源激发的波在台阶拐角的震波图。图中 U 为水平位移 (向右为正); W 为垂直位移 (向下为正); 4 和 5 分别为上拐角和下拐角 (见上方示意图。图中长度

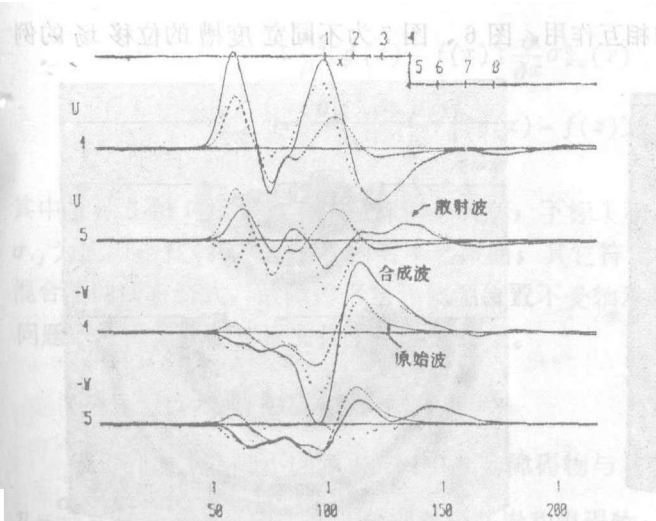


图 2 下台阶拐角 4, 5 的震波图

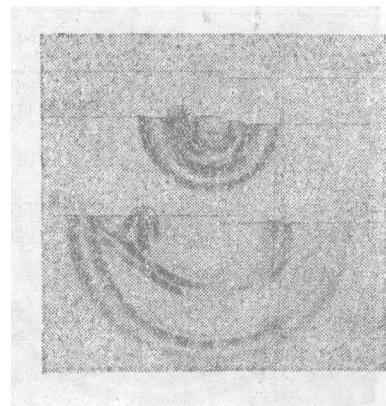


图 3 下台阶位移场

基本按比例, 波源以“×”号表示, 以下各图相同)。为突出间断的散射效应, 对半无限空间存在间断时的合成波和不存在间断时的原始波分别计算并以其差求出散射波, 在图中分别标出。从图中可见, 上拐角 4 因散射引起的水平位移无论其初动还是其主峰都和原始波同相位, 散射波垂直位移初动反相位而主峰同相位, 故间断的存在使上拐角的振动大大加强了。

而下拐角则呈现出与上拐角不同的散射特征：散射波相对原始扰动有较大的相位差，因而使实际地面振动相应减弱。在不同波源距离和不同台阶高度条件下的计算结果说明，在浅埋源条件下台阶上拐角的水平位移几乎都因台阶的存在而成倍增加，这可理解为台阶侧向自由面强烈反射的结果。

图3和图4给出了下台阶与上台阶的比较。下台阶中因主要能量被台阶反射，台阶左侧的

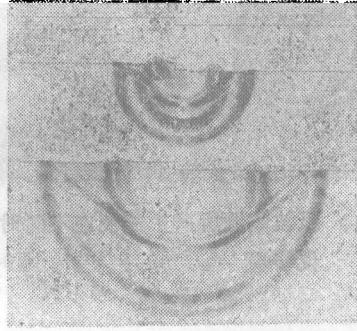


图4 浅上台阶位移场



图5 深上台阶位移场

体波和表面波都比右侧强得多；而上台阶并不存在强反射，故两侧波的强度相近。当上台阶的高度增加时，波更难于“攀登”悬崖（见图5），故和图4相比，图5中台阶左侧的表面波因台阶高度的增加而减弱，但这时拐角所造成的散射与绕射起着更明显的作用。从图可见台阶左侧的波场由于原始波与散射波的迭加而变得十分复杂，波所引起的地面扰动将比浅台阶延续更长时间。

用类似方法可研究波与槽形裂隙的相互作用，图6、图7为不同宽度槽的位移场的例

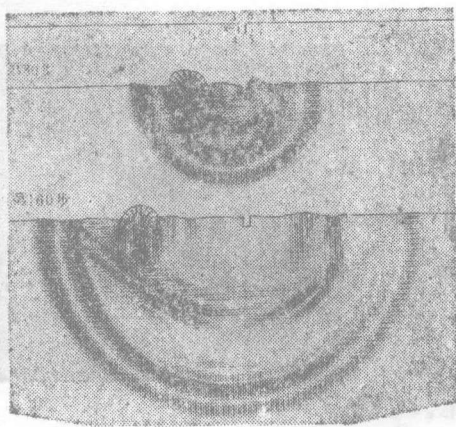


图6 窄槽形裂隙位移场

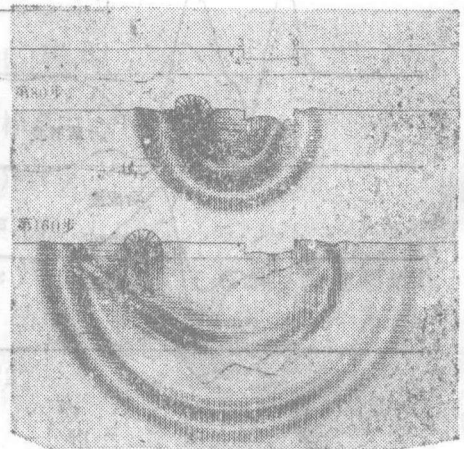


图7 宽槽形裂隙位移场

子。图形说明槽右侧的地面运动因槽的存在而明显减弱，但对不同宽度的槽由于原始波与散射波的迭加在幅度、时间和相位上的差别，使槽右侧的波场呈现较大的差别。当槽的宽度较小时，散射、绕射波以整个槽为中心分布，而在宽槽的条件下则可清楚地分辨出各拐角的散射效应。

从以上的研究分析可以看出,介质间断的类型或大小对波的传播有很大的影响。进一步的分析还揭示出,在浅埋源条件下决定反射波场的主要因素是台阶或槽的高度,而槽的宽度则对槽形裂隙远离波源一侧的波场影响较大^[2]。

四、波与表面障碍的相互作用

可通过对二维空间中波与表面障碍相互作用的探讨来研究带状地形如山脊或堑壕对地震波的影响。若障碍的自由表面和障碍与半无限基岩的界面之间的距离可用函数 $z = ef(x)$ 和 $z = eg(x)$ 分别描述,其中 e 为障碍的半高度,则当 e 很小(即 e 比有限差分法的空间步长 b 小很多)时传统的有限差分法难以直接使用,故本文采用以有限差分法和扰动法结合而成的混合法来进行研究。该法适用于障碍各处的相对高度和斜率都较小,而障碍内外物质的力学性质差别又不大的问题。

该方法首先利用扰动法把问题分解为求所模拟波源在半无限空间产生的零次解和因表面障碍造成的一次扰动解问题;其次,利用数学,力学基本关系和边界条件,在一阶精度近似下将一次解变换成表面应力源所激发的波的传播问题,而该表面应力源可由零次解求得〔见(8)式〕;最后,用有限差分法依次求出零次解和一次解。

$$\begin{cases} \sigma_{zz}^1(x) = \left[\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) g(x) - \frac{\rho_2}{\rho_1} f(x) \right] \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz}^0(x) \\ \sigma_{xz}^1(x) = \left[\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) g(x) - \frac{\rho_2}{\rho_1} f(x) \right] \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{xz}^0(x) + g'(x) \sigma_{xz}^0(x) \\ \quad + \frac{\rho_2}{\rho_1} [g(x) - f(x)] \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xz}^0(x) \\ \quad - \frac{4\mu_2(\lambda_2 + \mu_2)}{\lambda_2 + 2\mu_2} \left\{ [g(x) - f(x)] \frac{\partial^2}{\partial x^2} U^0(x) + [g'(x) - f'(x)] \frac{\partial}{\partial x} U^0(x) \right\} \end{cases}$$

其中上标 0 和 1 分别表示零次解和一次解;下标 1 和 2 分别表示半无限基岩和障碍内物质; σ_{ij} 为应力; $f'(x)$ 和 $g'(x)$ 为对 x 之微商;其它符号定义如前。本研究在直角坐标系下导出混合法的所有公式,故障障碍形状和波源位置不受轴对称条件限制,从而得以考虑广泛的实际问题^[3],因篇幅限制本文仅列出若干结果。

(一) 八种表面障碍的位移场

表 1 列出了八种不同障碍,表中 η 为障碍物与基岩力学性质常数之比值,为便于讨论,令 $\eta = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$, 其中 1 和 2 分别对应基岩和障碍物;表中 η_0 略大于 1, 为计算中摄定之常数;表中 $h(x)$ 沿用式(5)的函数形式。八种障碍的形状也列于表中,其中 7、8 两种为由基岩物质构成的表面鼓包或凹陷,可模拟波纹状地表结构。为便于比较,以下图形中用 0 号表示无障碍的半无限空间的相应结果。

在 $\eta_0 = 1.1$, $L = 2b$, $e = 0.7b$, 波源轴对称地位于障碍中心线,且 $d = 2b$ 的条件下,对上述八种障碍进行计算,其中 b 为有限差分的空间步长,在表面 $x = 4L$ 处所得的震波图如图 8

表1 八种表面障碍

类别	$f(x)$	$g(x)$	η	地 形
1	$-\varepsilon h(x)$	0	η_0	
2	$-\varepsilon h(x)$	0	$1/\eta_0$	
3	0	$\varepsilon h(x)$	η_0	
4	0	$\varepsilon h(x)$	$1/\eta_0$	
5	$-\varepsilon h(x)$	$\varepsilon h(x)$	η_0	
6	$-\varepsilon h(x)$	$\varepsilon h(x)$	$1/\eta_0$	
7	$-\varepsilon h(x)$	$-\varepsilon h(x)$	η_0	
8	$\varepsilon h(x)$	$\varepsilon h(x)$		

所示。图中各波形与 0 号波形的对比说明表面障碍改变了地面运动的幅度和相位，其影响的严重程度则因障碍而异。在此对称条件下，具有凸形表面的障碍(如 1，7 型)，尤其当其内部充填有比基岩更硬的介质时(如 5 型)，会造成明显的波的弥散和大的相位差；而对如 3、4

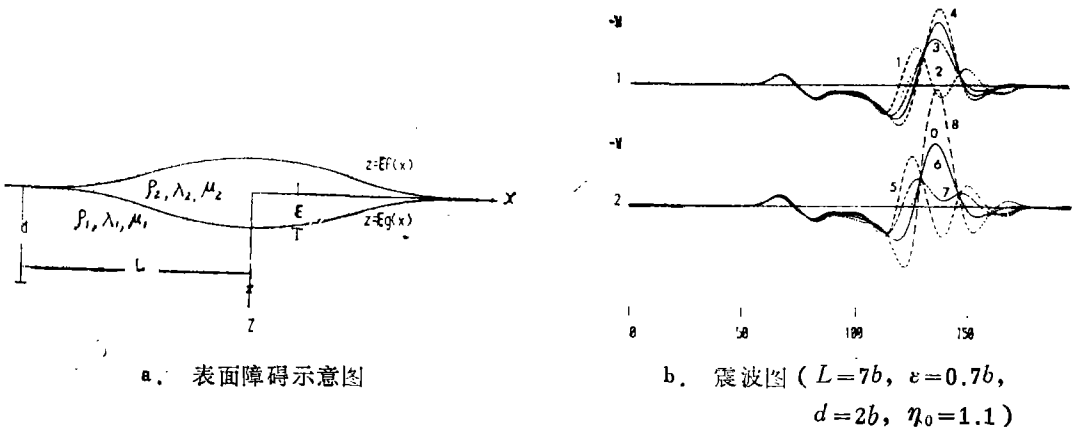


图 8 八种障碍及半无限空间的表面垂直位移在 $x=4L$ 处的震波图

和 8 型所对应的凹形界面障碍并无此现象。这显示了障碍几何形状对波的影响。由此影响开始起作用的时间分析显示，这主要是对瑞利波影响的结果。障碍物内外物质力学性质对比的影响可以从 5、6 型的波形对比看出，对此双凸面障碍，力学性质对比之颠倒 ($\eta = \eta_0$ 和 $\eta = 1/\eta_0$) 导致了震波图的相位颠倒。而对于 3、4 型所对应的单凸面障碍，力学性质对比的颠倒却只引起幅度的明显变化，这说明力学性质对比的变化对不同形状的障碍会有不同的影响。以上结果从图 9 所示的位移场可获得更全面的认识，该图说明浅障碍主要影响表面波，尤其对瑞利波的垂直位移影响较大；障碍所产生的散射波及其与原始波相互作用的结果使波所引起的介质扰动比无障碍时延续更长时间；对于 1，5，7 等种障碍，由于波的弥散及其与其它波的干涉，表面波呈现双峰结构。

(二) 非对称条件下的相互作用

所谓非对称可指障碍形状不对称，也可指波源位置相对于障碍不对称，现只讨论后者。

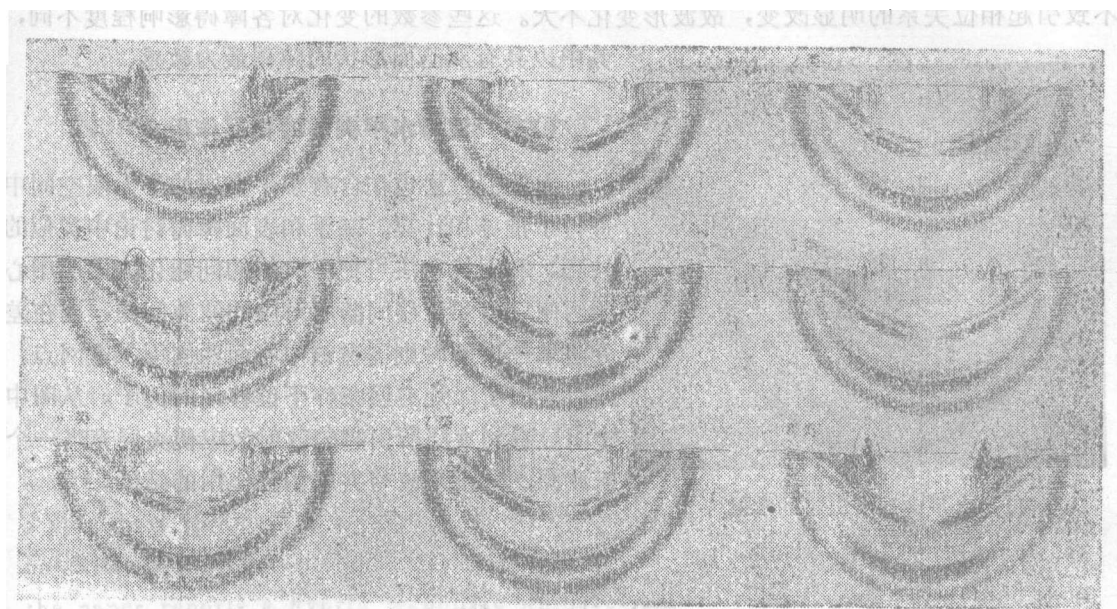


图9 八种障碍及半无限空间在 120 时间步的位移场

对于上述八种障碍在不同障碍宽度、波源非对称地位于障碍下方或与障碍相隔一距离等不同情况进行了模拟研究。图10为其中一例之位移场。根据所得结果可将非对称条件下波与障碍的相互作用和对称条件下的作用的主要区别概括如下:

1. 在对称条件下, 只在若干种障碍中发生明显的弥散现象; 而在非对称条件下, 所有类型的障碍都会导致波的弥散。

2. 在对称条件下, 障碍只对表面波有较大的影响; 而在非对称条件下, 对体波也有较明显的影响, 但与对面波的影响相比, 它对体波的影响仍是次要的。

3. 在非对称条件下障碍两侧的震波图呈现不同特点。面对波源一侧的震波图与无障碍时的相比, 并无严重的弥散和相位颠倒; 而在背离波源一侧, 由于障碍的作用, 波形出现明显的弥散和相位差。此外, 波源处于障碍下方时障碍对波的影响远大于波源远离障碍时的影响。

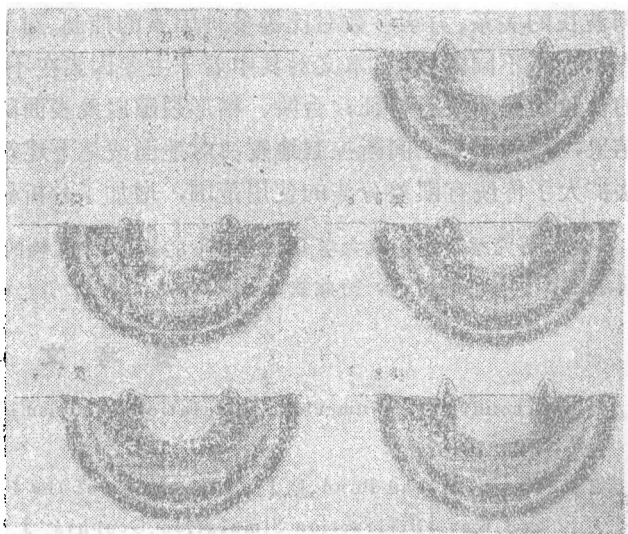


图10 非对称条件下 5--8 种障碍和半无限空间在 120 时间步的位移场

对在对称和非对称条件下障碍宽度、高度及障碍物力学参数变化的影响也分别进行了考察, 结果表明在多数情况下障碍宽度的增大将导致地面运动幅度的增大, 弥散现象也更为严重; η_0 值的小的变化一般只使波在界面上的反射系数有所改变而影响幅度, 但在多数情况下

不致引起相位关系的明显改变,故波形变化不大。这些参数的变化对各障碍影响程度不同,其中以具有双凸面形状的障碍最为敏感。

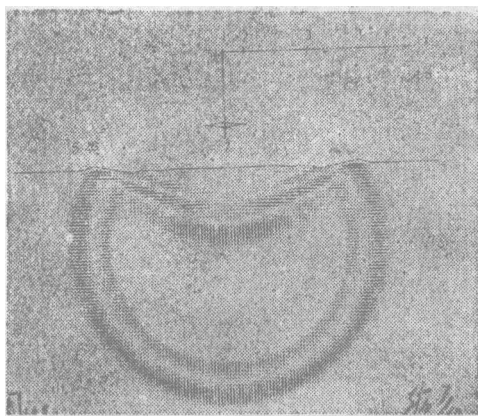


图11 水平夹层所引起的散射

(三) 波与水平夹层的相互作用

上述混合法也在含有水平夹层的半无限空间中进行了推导和计算。基于和表面障碍讨论中类似的技巧,利用扰动法可把一次解的问题化为夹层中心面两侧应力和位移间断所对应的波源问题,而在差分法求一次解时则需在该中心面两侧引入虚网点。图11给出了深处夹层条件下位移场的例子。从图中明显看到夹层所引起的散射效应使夹层充当一个新波源,这正是波与夹层相互作用的结果。

五、结 论

本文讨论了波与特征长度可与波长相比拟的规则地形变化的相互作用和波与不规则表面浅障碍或波纹状表面的相互作用,这两类问题都可用有限差分法解决。所得结果说明表面地形确对波的传播,特别是对表面波中瑞利波的传播产生很大影响,它改变波的幅度和相位,产生波的弥散和各种波型转换。这种影响是非常复杂的,它受地形类型、间断特征尺寸及其与波长的关系、力学参数对比等多种因素的控制。对于一个特定的地形而言,这些因素的综合作用会有不同的效应。本文对其中若干主要因素在不同条件下进行了不同程度的讨论,所揭示的台阶拐角的散射特征;台阶、槽形裂隙以及表面障碍宽度、高度和力学参数变化的影响等结果,对利用人工间断控制地震波对地面或地下建筑的破坏作用有参考价值。所导出的混合法扩大了传统有限差分法的使用范围,增加了分析研究有关实际问题的能力。

此项研究承英国伦敦大学 Dr. Bond 的指导。中文稿的撰写中与中国科学院武汉岩土力学所李廷芥同志进行了有益的讨论,特此致谢。

参 考 文 献

- [1] Aboudi, J., Numerical Simulation of Seismic Source, Geophysics, Vol.36(5), 1971, PP.810-821.
- [2] Hong, M. and Bond, L.J., Application of the Finite Difference Method in Seismic Source and Wave Diffraction Simulation, Geophys. J. R. Astr. Soc. Vol. 87, 1986, pp.731-752.
- [3] Hong, M., Bond, L.J. and Murrell, S.A.F., Computer Modelling of Seismic Wave Propagation and Interaction with Discontinuities in Rock Masses, in "Rock Mechanics: Key to Energy Production", Proceedings of the 27th U.S. Symposium on Rock Mechanics, Published by the Society of Mining Engineers, Inc. Littleton, Colorado, 1986, PP.488-495.

Numerical Modelling of Wave Propagation and Interaction

Hong Minxuan

Abstract

This paper investigates wave propagation and its interaction with discontinuities in media using numerical models which employ a finite difference method.

The paper has two parts, the first of which considers wave propagation and scattering by simulating a compressive body source in a 2-D half-space containing a step or a slot on the surface, which represents a cliff or a rift valley that has dimensions of the order of the wavelength in the source. The second part of the paper reports a hybrid technique which combines a perturbation method and the finite difference method for wave propagation again caused by the body source in a 2-D half-space system but with a shallow surface obstacle, such as a smoothed ridge, with elastic constants slightly different from bulk material and the slopes of the topography being shallow. This hybrid technique is also reported being applied to a half-space with a horizontal insert or void. Results obtained are of importance in both theoretical studies on wave propagation and interaction and applied researches on the analysis and isolation of the damage caused by seismic waves.